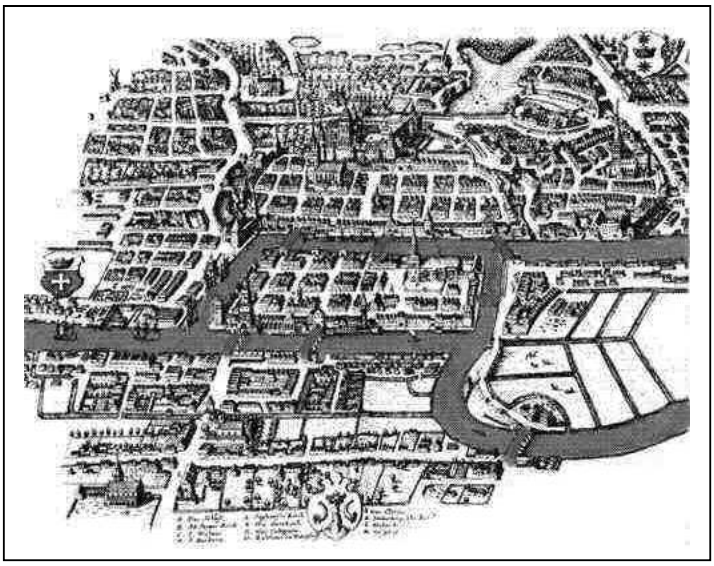
Arbeitsblatt zum Königsberger Brückenproblem

Die Abbildung zeigt die Stadt Königsberg (heute Kaliningrad) im 18. Jahrhundert. Die beiden Arme des Flusses Pregel umfließen eine Insel, den Kneiphof. Es gibt insgesamt sieben Brücken über den Fluss.



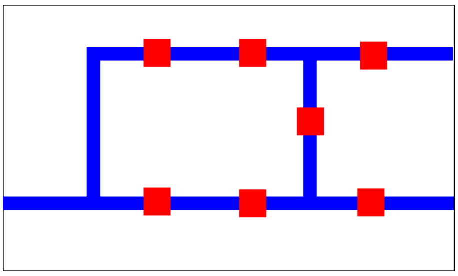
Einige Königsberger stellten sich damals folgende Frage:

Gibt es einen Weg, der jede Brücke genau einmal benutzt?

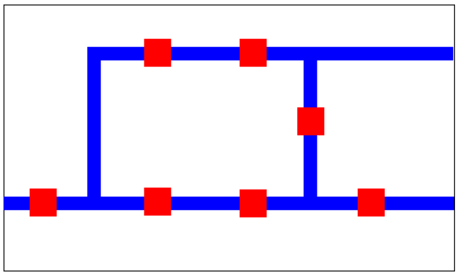
Der Mathematiker Leonhard Euler beantwortete 1736 diese Frage mit einer Methode, welche die moderne Graphentheorie begründete.

Aufgabe 1: **a)** Beantworte die Frage durch Probieren: Gibt es einen Weg, der jede Brücke genau einmal benutzt? Zeichne diesen in die schematische Darstellung ein.

b) Die obere Pregel-Brücke wurde abgerissen, dafür wurde eine neue Brücke im Westen der Stadt errichtet. Gibt es nun einen Weg, der jede Brücke genau einmal benutzt? Zeichne diesen wenn möglich in die Darstellung ein.

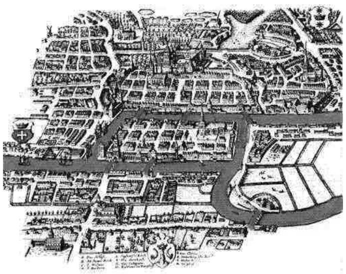


Schema zu a)



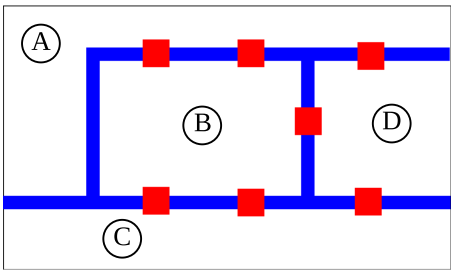
Schema zu b)

Bevor wir nun uns daran wagen, eine allgemeingültige Antwort auf die Frage für beliebige Städte zu geben, sollten wir die Darstellung stärker schematisieren:



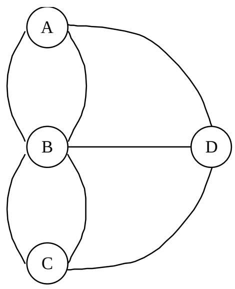
Stadtplan

⇉



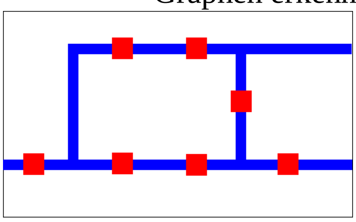
Schematisierter Stadtplan

⇉

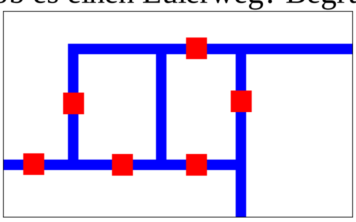


Graph

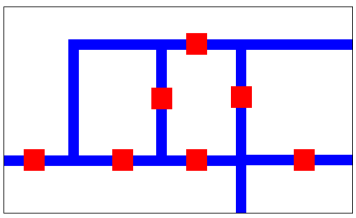
Aufgabe 2: Stelle die folgenden Stadtpläne als Graph dar. Gibt es jeweils einen Weg der gesuchten Art – nennen wir ihn ab jetzt **Eulerweg**? Wie kann man anhand des Graphen erkennen, ob es einen Eulerweg? Begründe!



Plan a)

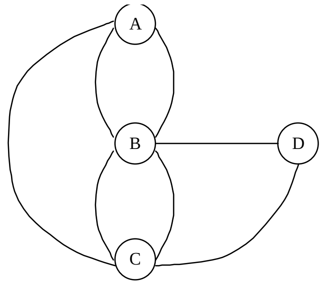


Plan b)



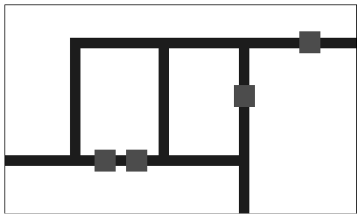
Plan c)

ARBEITSBLATT ZU WEGE IN GRAPHEN



Der rechts abgebildete Graph schematisiert den abgeänderten **PLAN A)** von Königsberg. Die **Knoten** des Graphen **{A, B, C, D}** entsprechen dabei den Stadtgebieten, die **Kanten** des Graphen **{AB, AC, BC, BD, CD}** entsprechen den Brücken zwischen den Stadtgebieten. Ein Weg im Graphen setzt sich aus mehreren aneinanderhängenden Kanten zusammen, so ist z. B. **AB-BC-CD-DB** ein **zusammenhängender Weg** im Graphen. Die Anzahl der aus einem Knoten abgehenden Kanten nennt man den **Grad eines Knotens**, so hat z. B. der Knoten B den Grad 5.

Aufgabe 3: Begründe folgende Aussage:
Existiert in einem Graphen ein Eulerweg, so besitzen alle Knoten (bis auf zwei) geraden Grad.



Aufgabe 4: Wie das rechts abgebildete Beispiel zeigt, ist folgende Aussage ist falsch:
Besitzen alle Knoten (bis auf zwei) eines Graphen geraden Grad, so existiert ein Eulerweg.

a) Wiederlege die Aussage durch zwei weitere Gegenbeispiele.

b) Welche Gemeinsamkeit besitzen deine Beispiele und das vorgegebene Beispiel? Zeichne und charakterisiere die zugehörigen Graphen.

SATZ 1:
In einem Graphen existiert genau dann ein Eulerweg, wenn für den Graphen gilt: (I) der Graph ist zusammenhängend und (II) alle (bis auf zwei) Knoten besitzen geraden Grad.

Bevor wir diesen Satz beweisen können wollen wir uns zuvor um die verschärfte Version des Satzes kümmern: Der Eulerweg soll geschlossen sein, d. h. Anfangs- und Endpunkt des Weges sind identisch. Man spricht hierbei von einem **EULERKREIS**.

SATZ 2:
In einem Graphen existiert genau dann ein Eulerkreis, wenn für den Graphen gilt: (I) der Graph ist zusammenhängend und (II) alle Knoten besitzen geraden Grad.

BEWEIS:

(i) In einem Graphen existiert ein Eulerkreis.
In Aufgabe 3 wurde gezeigt, dass bis auf Anfangs- und Endpunkt alle Knoten eines Weges geraden Grad haben. Das gleiche gilt natürlich auch für einen Eulerweg. Bei einem Eulerkreis sind zusätzlich Anfangs- und Endpunkt identisch, also besitzt dieser Knoten auch geraden Grad.
Ein Eulerkreis ist ein zusammenhängender Weg und führt genau einmal über alle Kanten des Graphen. Dann sind aber auch alle Knoten des Graphen vom Anfangspunkt des Eulerweges erreichbar und der Graph ist zusammenhängend.

(ii) Der Graph ist zusammenhängend und alle Knoten besitzen geraden Grad.
... konstruktiver Beweis gesucht ...

Aufgabe 5: Zeichne zwei beliebige Graphen, welche die Eigenschaften (I) und (II) erfüllen. Finde jeweils einen Eulerkreis im Graphen. Manchmal verläuft man sich beim ersten Versuch. Ist dann ein kompletter Neubeginn nötig?

KONSTRUKTIVER BEWEIS ZUM EULERKREIS

Zu zeigen war die Behauptung:

Wenn ein Graph zusammenhängend ist und alle Knoten geraden Grad besitzen, dann existiert ein Eulerkreis.

Der folgende konstruktive Beweis liefert gleichzeitig einen Algorithmus, mit dem man einen solchen Eulerkreis ermitteln kann.

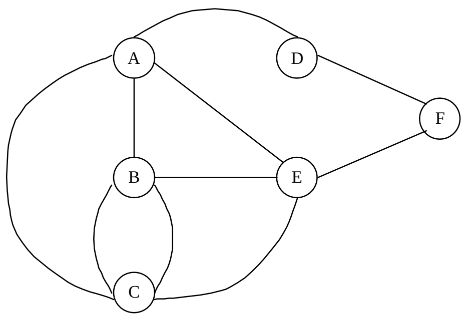
Algorithmus	**SUCHE_EULERKREIS**
Input:	Graph: TGraph { = *record Knoten: array of TKnoten; Kanten: array of TKante end* }
Output:	Weg: TWeg
Hilfsobjekte:	Akt_Knoten: TKnoten Kante_besucht: array of boolean

- Wähle einen Startknoten.
- Solange noch nicht alle Kanten besucht wurden:
  - Wenn vom aktuellen Knoten eine unbesuchte Kante abgeht,

    dann
    - Füge diese Kante dem Weg hinzu.
    - Markiere die Kante als besucht.
    - Setze den aktuellen Knoten auf den Endknoten dieser Kante.

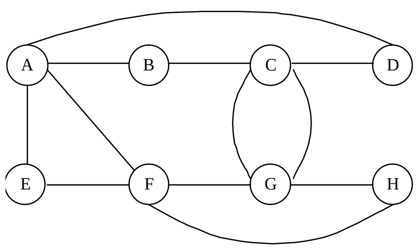
    sonst { *Der bisherige Weg ist ein unvollständiger Rundweg* }
    - Wähle als aktuellen Knoten einen bereits besuchten Knoten, der noch eine unbesuchte Kante besitzt. { *Ein solches Gebiet existiert immer* }
    - Starte den gleichen Rundweg von diesem Knoten ausgehend.
    - Füge die jetzt existierende noch nicht besuchte Kante dem Weg hinzu.
    - Markiere diese Kante dann als besucht.
    - Setze den aktuellen Knoten auf den Endknoten dieser Kante.

Aufgabe 6: Veranschauliche dir die Aussage im sonst-Teil des Algorithmus an rechts abgebildetem Beispiel: Starte beim Knoten D. Durchlaufe DF-FE-EA-AD. Wir erhalten einen unvollständigen Rundweg. Knoten A (und E) enthalten noch unbesuchte Kanten, also durchlaufe den gleichen Rundweg ausgehend von Knoten A: AD-DF-FE-EA. Durchlaufe anschließend: AC-CE-EB-BC-CB-BA, also insgesamt ein Eulerkreis: AD-DF-FE-EA-AC-CE-EB-BC-CB-BA in dem jede Kante genau einmal durchlaufen wird.



Aufgabe 7: **a)** Begründe für den unten abgebildeten Graphen, dass es einen Eulerkreis geben muss.

b) Finde nun mithilfe des oben beschriebenen Verfahrens einen Eulerkreis im Graphen.



Aufgabe 8: Beweise den SATZ 1 vom ARBEITSBLATT ZU WEGE IN GRAPHEN.